# Türev Yardımıyla Belirsizliklerin Giderilmesi 10. Ders

## L'Hospital Kuralı

① $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ veya $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ oluyorsa LH kuralı kullanılır ve

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ olur}$$

Eğer belirsizlik 1. türevden sonra da devam ederse LH kuralı birden fazla kez uygulanabilir.

$x\to a$ yerine $x\to a^-$, $x\to a^+$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$ için de kural geçerlidir.

② $0.\infty$, $\infty-\infty$ belirsizlikleri önce $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ a çevrilir sonra LH uygulanır.

Örnekler

1) $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\ln x} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{-x}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2}$

2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) (\infty-\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x\sin x} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$

4) $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} \ (\infty.0) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$\overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$

5) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^2} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1} = \frac{1}{2}$

7) $\lim_{x\to 4} \frac{8-2x}{x^2-16} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to 4} \frac{-2}{2x} = \frac{-1}{4}$

② $0^0$, $1^\infty$, $\infty^\infty$ üstel belirsizlikleri için aranan limite $y$ ismi verilir ve her iki tarafın logaritması ($\ln$'i) alınarak diğer belirsizliklere çevrilir

Örnekler

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = ?$ $(0^0)$

$y = x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln y) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$ $(0\cdot\infty)$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$\overset{LH}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln y) = 0$

$\Rightarrow \ln\left(\lim\limits_{x\to 0^+} y\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$ bulunur

2) $\lim\limits_{t\to 0} (\cos 2t)^{\frac{1}{t^2}}$ $(1^\infty)$

$y = (\cos 2t)^{\frac{1}{t^2}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{t^2}\ln(\cos 2t)$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0}(\ln y) = \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2}\ln(\cos 2t)\right)$ $(\infty\cdot 0)$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln\cos 2t}{t^2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{LH}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\frac{-2\sin 2t}{\cos 2t}}{2t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-\cancel{2}\sin 2t}{\cancel{2}t\cos 2t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-\tan 2t}{t} = -2$

$\ln\left(\lim\limits_{t\to 0} y\right) = -2$

$\lim\limits_{t\to 0} y = e^{-2} = \lim\limits_{t\to 0} (\cos 2t)^{\frac{1}{t^2}}$

CamScanner ile tarandı